Printed Pages – 8

NJ-1268

B.Sc. (Part - I) Examination, Mar.-Apr., 2023

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिये कि :

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=0$$

Prove that :

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot$$

$$\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=0$$

(b) यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, तब सिद्ध कीजिये

grad $r^n = nr^{n-2}\ \vec{r}$

If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, then prove that grad r^n = $nr^{n-2}\ \vec{r}$.

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl}\left(\text{curl}\vec{F}\right)=\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$$

Prove that :

$$\text{curl}\left(\text{curl}\vec{F}\right)=\text{grad}\left(\text{div}\,\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) यदि $\vec{F}=e^{2x}\sin y\,\hat{i}+e^{-x}\cos y\,\hat{j}$ तब $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ का मान प्राप्त कीजिये जहाँ C एक आयत है, जिसके शीर्ष (0, 0), (1, 0), $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ एवं $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ हैं।

If $\vec{F} = e^{2x} \sin y \,\hat{i} + e^{-x} \cos y \,\hat{j}$, then find the value of $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where C is a rectangle whose vertices are (0, 0), (1, 0), $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) सिद्ध कीजिये कि :

$$\iint_s \left(ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}\right) \cdot \hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

जहाँ s गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है।

Show that :

$$\iint_s \left(ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}\right) \cdot \hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

where s is the surface of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(c) स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिये जब $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ एवं पृष्ठ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy-समतल का ऊपरी भाग है।

Verify Stoke's theorem when $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy-plane.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) शांकव का अनुरेखण कीजिये :

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

Trace the conic :

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

(b) वृत्त का समीकरण प्राप्त कीजिये जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ एवं $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ को लाम्बिक प्रतिच्छेद करता है।

Find the equation of circle, passing through the origin and cut the circles $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ orthogonally.

(c) शांकव $\frac{\ell}{r}=1+e\cos\theta$ की जीवा के ध्रुव का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिये जो कि नाभि पर अचर कोण 2α का बनाता है।

Find the locus of pole of chord of conic $\frac{\ell}{r}=1+e\cos\theta$, which subtend a constant angle 2α at the focus.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) गोले का समीकरण प्राप्त कीजिये जो मूलबिन्दु एवं अन्य बिन्दुओं (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) से होकर गुजरता है।

Find the equation of sphere passing through the origin and the points (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c).

(b) सिद्ध कीजिये कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को दो लम्बवत् रेखाओं में काटता है यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Show that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in two perpendicular lines if :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

(c) लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका जनक वक्र $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x - y + z = 3$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिये कि सन्नाभि शांकवज एक-दूसरे को लम्बवत् काटते हैं।

Prove that confocal conicoids cut each other at right angles.

(b) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ के बिन्दु (2, 3, –4) से जाने वाले जनक के समीकरण प्राप्त कीजिये।

Find the equation of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ which passes through the points (2, 3, –4).

(c) निम्न समीकरण को प्रमाणिक रूप में समानयन कीजिये :

$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x +$

$12y - 6z + 5 = 0$

Reduce the following equation in standard form :

$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x +$

$12y - 6z + 5 = 0$